

Aplikace pro numerické řešení matematických úloh

Bc. Zdeněk Kybl, RNDr. Dana Černá, Ph.D.

Abstrakt

Úvod

V předpočítačové éře bylo naprosto nepředstavitelné provádět velké množství početních operací, a proto se odborníci aplikované matematiky snažili nalézt řešení analytickým způsobem, pomocí něhož došlo k redukci počtu prováděných operací. Ovšem získání tohoto přesného řešení je mnohdy nemožné, či velice složité a pracné. Naštěstí se ukazuje, že pro v praxi ve většině případů postačí pouze řešení přibližné. S rozvojem počítačů došlo ke zlevnění početní operace a v tuto chvíli přichází na řadu numerická matematika.

I přes nesporné využití numerické matematiky a matematiky obecně při řešení reálných problémů (jmenujme například odvětví strojírenství, teorie obvodů či stavitelství) není o studium této problematiku příliš velký zájem.

Z tohoto důvodu si tato práce klade nejprve za úkol seznámit čtenáře s vybranými numerickými metodami a na základě této teoretické stati vytvořit didaktickou aplikaci, která bude kromě samotného řešení uživateli interpretovat i postup výpočtu, pomocí něhož bylo řešení dosaženo. Implementovaná aplikace by měla dále obsahovat soubor cvičných úloh včetně podpory pro vykreslování grafů a exportů dat. Pro distribuci aplikace budou zhotoveny webové stránky

Numerické metody

V první kapitole byl vyhrazen prostor metodám sloužícím pro interpolaci a aproximaci funkce. Využití aproximací funkce je poměrně různorodé. Pokud například chceme na počítači vypočítat funkční hodnotu jisté funkce, tak výpočet této hodnoty se často děje právě pomocí aproximací funkcí, kdy je vstupní funkce f nahrazena jistým polynomem P , a to zejména z důvodu snadné a hlavně rychlé práce s mnohočleny. Polynomy jsou totiž poměrně snadno vyčíslitelné, jejich derivace i integrály jsme schopni snadno a rychle vypočítat.

Čtenář je postupně seznámen s Lagrangeovým a Newtonovým interpolačním polynomem, metodou nejmenších čtverců a metodami pro interpolaci pomocí lineárního, kvadratického a kubického splinu.

Další kapitoly jsou věnovány metodám pro numerický výpočet integrálu a derivace. Analytický výpočet (zejména integrálu) je často velice složitý a pracný, či dokonce nemožný. Princip numerických metod zabývajících se touto numerickou oblastí spočívá v nahrazení původní funkce jednodušší aproximující funkcí. Hodnotu integrálu či derivace funkce v bodě položíme hodnotě získané pomocí těchto jednodušších funkcí. V těchto kapitolách jsou blíže charakterizovány Newton – Cotesovy vzorce, metoda polovičního kroku, Gaussova či Rombergova kvadratura, Richardsonova extrapolace nebo metody sloužící pro výpočet derivace funkce v bodě pomocí diferencí.

Soustavy lineárních rovnic jsou velice častou úlohou numerické matematiky vyskytující se například v teorii obvodů či statistice. Čtenář je seznámen s přímými (Gaussova eliminace, LU a Choleského rozklad), a iteračními metodami (Jacobiho, Gauss-Seidelova, Superrelaxační metoda), které slouží k nalezení numerického řešení soustav lineárních rovnic. Dále je zde charakterizován singulární rozklad pro nalezení řešení soustav s obdélníkovou maticí.

Předposlední kapitola první části práce je věnována řešení nelineárních rovnic, které slouží pro nalezení kořene funkce (např. metoda bisekce, Newtonova metoda nebo Sturmova posloupnost k nalezení všech reálných kořenů polynomu).

Šestá kapitola teoretické části se zabývá algoritmy pro nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů reálných symetrických matic. Tyto algoritmy nachází například využití v oblasti zpracování obrazu. Jsou zde blíže diskutovány metody pro nalezení dominantního vlastního čísla a vektoru matice

(mocinná metoda, Rayleighův podíl, inverzní mocinná metoda, Hotellingova redukce) nebo algoritmy pro nalezení všech vlastních čísel a vlastních vektorů matice (QR algoritmus).

Ve druhé části je čtenáři představena implementovaná aplikace, která byla programována v jazyce C#. Model aplikace je rozdělen do tří vrstev.

První vrstva obsahuje všechny numerické metody charakterizované v první části práce. Vzhledem k didaktickému pojetí aplikace nelze předávat vyšším vrstvám pouze výsledek úlohy. Musí být předávány datové struktury, které obsahují informace nutné i pro interpretaci postupu výpočtu.

Druhá kapitola slouží pro kontrolu uživatelem zadaných vstupních dat. Současně je v této kapitole implementován Shunting-Yard algoritmus pro převedení matematických výrazů do postfixové notace a algoritmus sloužící pro vyčíslení těchto výrazů. Tato vrstva kooperuje jednak s nejnižší, a jednak s nejvyšší vrstvou.

Poslední vrstvou je prezentační vrstva, která slouží pro přijetí úlohy zadané uživatelem a pro vlastní prezentaci postupu řešení a výsledku. Pro zvýšení didaktické úrovně aplikace je výstup s řešením uživateli interpretován ve formě HTML stránky, přičemž všechny matematické výsledky jsou vysázeny za pomoci Javascriptové knihovny MathJax, která umožňuje vykreslování výrazů zapsaných pomocí LaTeXu nebo MathML. Z tohoto důvodu aplikace obsahuje metody, které slouží pro automatické převedení matematických výrazů do MathML kódu. V případě řešení úloh spadajících do oblasti numerické integrace, řešení nelineárních rovnic či aproximace funkce je součástí HTML dokumentu i grafické řešení úlohy.

Pro zvýšení komfortu práce s aplikací může uživatel určit, zda požaduje postup výpočtu, může nastavit velikost písma či počet desetinných míst, které se budou v HTML stránce zobrazovat. Současně může dále rozšiřovat implementovanou sadu úloh, kde jednotlivé úlohy jsou ukládány jako XML soubory. Ke každé úloze je dále možno přidat poznámku. Aplikace dále umožňuje exportování do dalších formátů, kterými jsou například XML, HTML, JPG, BMP, PNG, GIF, TIFF nebo PDF.

Závěr

Aplikace v současné podobě obsahuje čtyřicet šest numerických metod z šesti oblastí numerické matematiky. Tyto metody jsou nejprve blíže charakterizovány, a poté implementovány. Aplikace na rozdíl od valné většiny již existujících programů umožňuje zobrazit uživateli kromě řešení i samotný postup, jímž bylo výsledku dosaženo. Výstup je uživateli prezentován ve formě HTML stránky, přičemž matematické výrazy jsou vykreslovány pomocí MathJax knihovny. Kromě toho aplikace obsahuje editovatelnou sadu úloh či umožňuje exportovat získané výsledky do dalších formátů.

Pro distribuci aplikace byly vytvořeny webové stránky www.numerickemetody.cz, na nichž je možno stáhnout danou aplikaci a text diplomové práce.

Aplikace je studenty využívána nejen pro kontrolu při ručním počítání matematických úloh, ale i při ladění jejich programů.

Aplikaci bych chtěl v budoucnu rozšířit o metody z oblasti obyčejných či parciálních diferenciálních rovnic.

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucí mé práce RNDr. Daně Černé, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování diplomové práce věnovala.

Reference

- [1] RALSTON, Anthony. Základy numerické matematiky. 2. vyd. Praha: Academia, 1978, 636 s.
- [2] FAJMON, Břetislav a RŮŽIČKOVÁ Irena. Matematika 3: Numerické metody [online]. Brno, 2013 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: <http://www.umat.feec.vutbr.cz/~novakm/matematika3.pdf>. Vysokoškolská skripta. Vysoké učení technické v Brně.
- [3] FELCMAN, Jiří. Numerická matematika [online]. Praha, 2013 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~felcman/nm.pdf>. Vysokoškolská skripta. Univerzita Karlova.