

METODY ROZKLADU JEDNOTKY PRO APROXIMACI BODOVÝCH ZDROJŮ VODY V PORÉZNÍM PROSTŘEDÍ

autor: BC. PAVEL EXNER

vedoucí: MGR. JAN BŘEZINA PH.D.

Abstract

The finite element method (FEM) cannot approximate the accurate pressure close to point sources (wells in this work) properly. The main aim of this paper is an application of XFEM method which can compensate the error of the approximation by linear finite elements and provides more accurate solution.

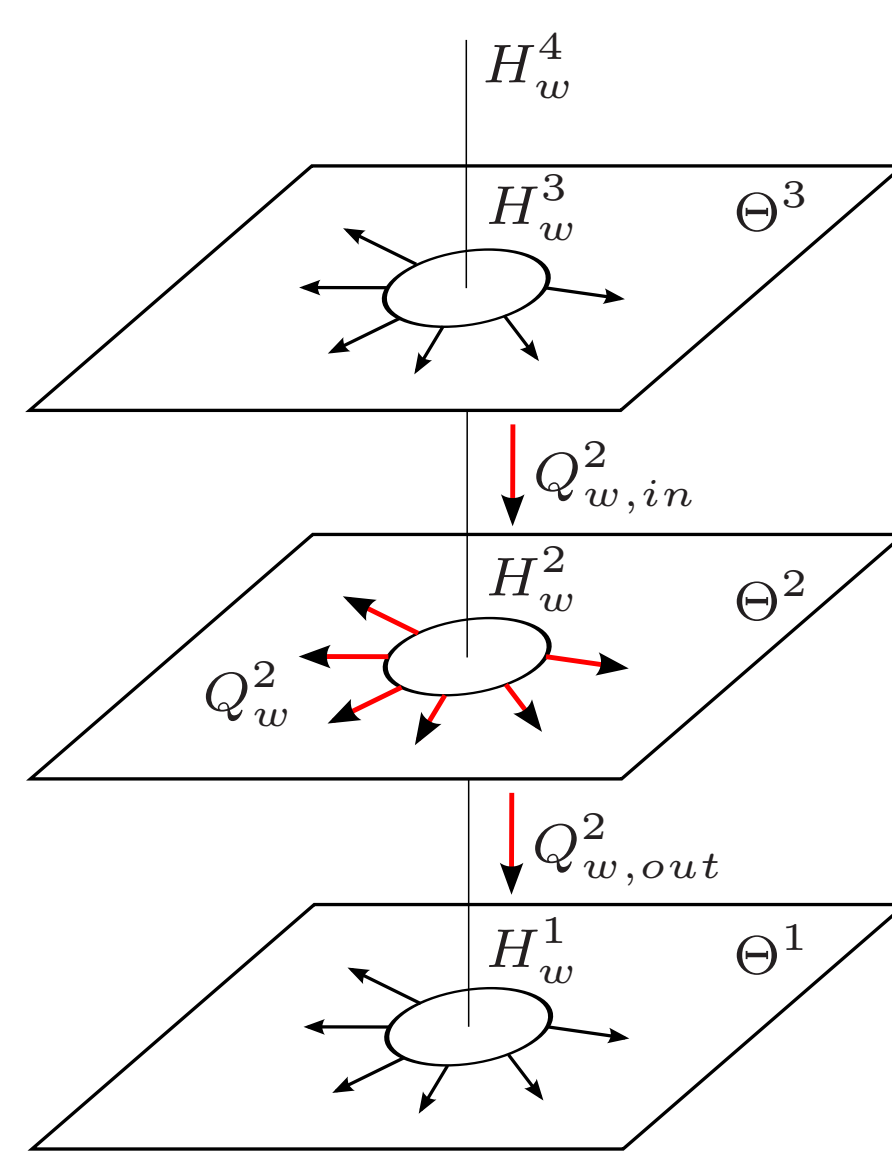
Model

V modelech proudění podzemních vod jsou často zahrnuty rozsáhlé oblasti, vůči kterým se jeví zdroje (např. hydrogeologické vrty) jako bodové. Metoda konečných prvků nedokáže dostatečně přesně aproximovat tlak a proudové pole v okolí těchto zdrojů. Naším cílem je implementace metody XFEM pro výpočet takových modelů a porovnání s metodou lineárních konečných prvků. Vycházíme z článku [5], jehož výsledky se snažíme rekonstruovat vlastní implementací a obohatit.

Proudění podzemní vody v hornině lze často zjednodušit na model proudění ve vrstvách (zvodních), neboť i hornina je tvořena vrstvami. Předpokládáme, že jednotlivé zvodně, 2D plochy označené Θ^m , jsou od sebe odděleny nepropustnou vrstvou a komunikují mezi sebou pouze prostřednictvím vrtů. Matematicky popíšeme takový model soustavou rovnic

$$-T^m \Delta h^m = f^m \quad \text{na } \Theta^m, \quad (1)$$

$$\int_{\partial B_w^m} \sigma_w^m (h^m - H_w^m) dx = c_w^{m+1} (H_w^m - H_w^{m+1}) - c_w^m (H_w^{m-1} - H_w^m). \quad (2)$$



Obr. 1: Model proudění ve vrtu.

Indexy m a w v rovnicích označují vztah veličin k m -té zvodni a k w -tému vrtu. Rovnice (1) je odvozena z Darcyho zákona a z rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu, za předpokladu izotropního prostředí. Rovnice (2) vyjadřuje rovnováhu toků, viz obr. 1. V (1) a (2) značí T^m [m²s⁻¹] transmisivitu, h^m [m] tlakovou výšku, f^m [ms⁻¹] hustotu zdrojů v m -té zvodni, σ_w^m [ms⁻¹] koeficient propustnosti mezi w -tým vrtem a m -tou zvodni, H_w^m tlakovou výšku ve vrtu w na úrovni zvodně m , c_w^m [m²s⁻¹] propustnost vrtu mezi zvodněmi a ∂B_w^m hranici vrtu.

Metoda XFEM (Extended Finite Element Method)

Metoda XFEM (metoda rozšířených konečných prvků) je založena na principu rozšíření prostoru pro hledání řešení funkcemi, které jsou schopné dobře zachytit lokální diskontinuity či singularity, více v [4] a [1].

Prostor bázových funkcí rozšíříme o funkci přirozeného logaritmu.

$$\phi_w(\mathbf{x}) = \begin{cases} \log(r_w(\mathbf{x})), & r_w > R_w \\ \log(R_w), & r_w \leq R_w \end{cases} \quad (3)$$

kde r_w je vzdálenost bodu \mathbf{x} od středu vrtu a R_w je poloměr vrtu.

Použijeme modifikovanou metodu XFEM, jejíž modifikace řeší problémy na tzv. rozmývacích (blending) elementech, tedy na elementech na rozhraní mezi obohacovací a neobohacovací částí (více v [3]). Řešení hledáme tedy ve tvaru

$$h^m(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha_j^m \varphi_j^m(\mathbf{x})}_{\text{FEM}} + \underbrace{\sum_{w \in \mathcal{W}} \sum_{k \in \mathcal{N}_w} g_w^m(\mathbf{x}) \beta_{w,k}^m \phi_w^m(\mathbf{x}) \varphi_k^m(\mathbf{x})}_{\text{obohacení}}. \quad (4)$$

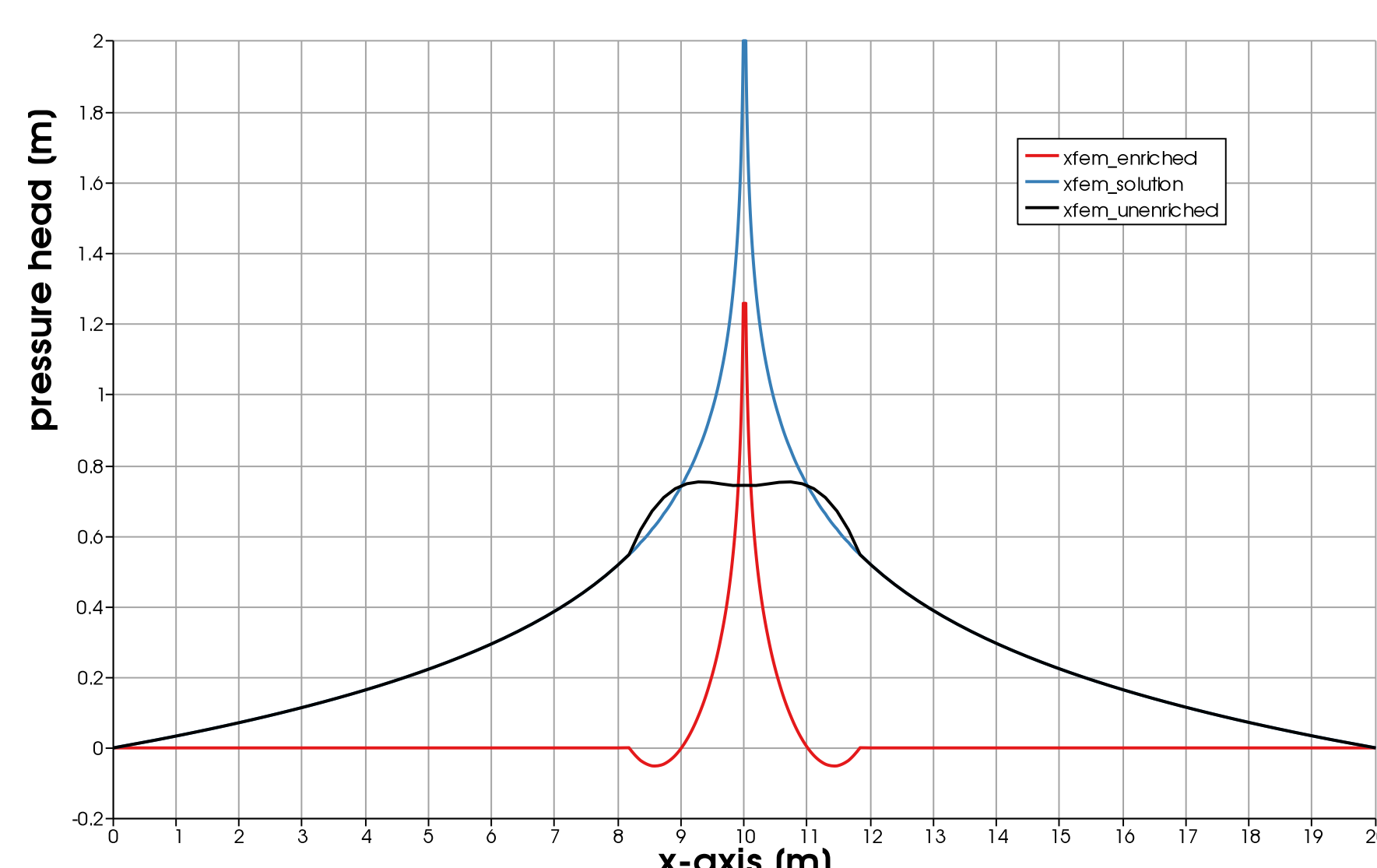
V rovnici (4) obsahuje množina \mathcal{W} indexy vrtů, množina \mathcal{N} indexy všech uzlů sítě, množina \mathcal{N}_w indexy všech obohacovaných uzlů (přidaných stupňů volnosti) od w -tého vrtu. Stupně volnosti α_j náleží konečným prvkům a β_k obohacení. Oblast obohacení v okolí vrtu definujeme pomocí poloměru r_{enr} . Funkce φ jsou lineární bázové funkce.

Funkce $g(\mathbf{x})$ je funkcí rampy ve tvaru

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{u \in \mathcal{N}} g_u \varphi_u(\mathbf{x}). \quad (5)$$

kde váhy g_u jsou rovny jedné na uzlech uvnitř oblasti r_{enr} a nulové jinde. Tato funkce řeší přechod mezi obohacovací a neobohacovací částí řešení.

Na obr. 3 vidíme řešení úlohy s jedním vrtem. Černě je vyznačena lineární část, červeně obohacení a modře celkové řešení, tedy jejich součet.

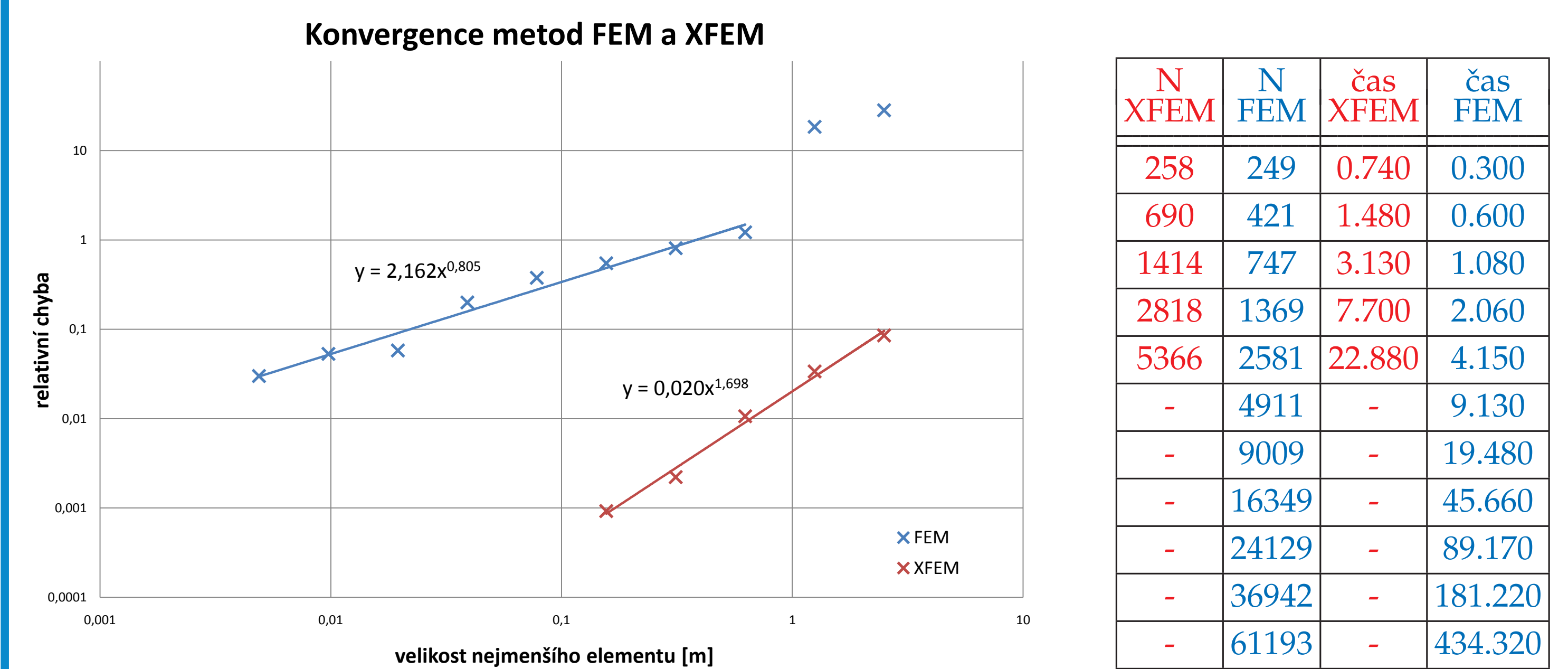


Obr. 3: Dekomponované řešení XFEM. Zvoleno $r_{enr} = 2$.

Měření konvergence

V úloze na kruhové oblasti o poloměru R , s jediným vrtem v jejím středu, známe analytické řešení ve tvaru $u(r) = a \log(r) + b$, kde konstanty a, b jsou určeny Dirichletovou okrajovou podmínkou. Potom jsme schopni měřit konvergenci vypočtených modelů k přesnému řešení.

Mějme takovou úlohu s parametry $R = 10$ m, poloměrem vrtu $R_w = 0.02$ m, tlakem ve vrtu $P_w = 2.0$ m, $\sigma = 10^5$ ms⁻¹ a $T = 10^{-4}$ m²s⁻¹ a $r_{enr} = 2$ m.



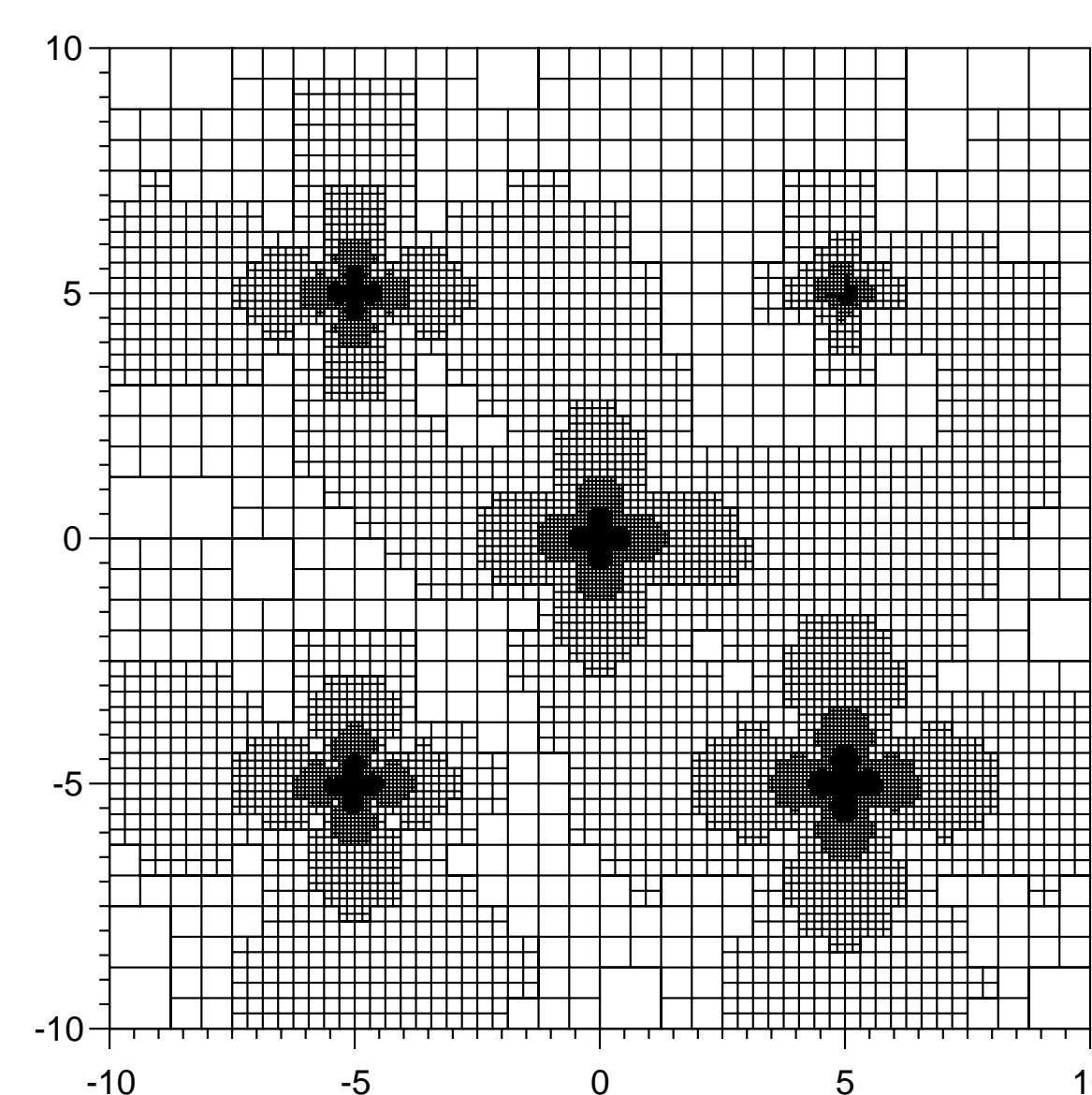
Obr. 4: Graf konvergence metod FEM (modrá) a XFEM (červená). Body proloženy mocninnou funkcí, přičemž první dvě největší chyby řešení pomocí FEM jsou vynechány. Můžeme odhadnout řád konvergence metody FEM $O(h^{0.8})$ a metody XFEM $O(h^{1.7})$.

Tab. 1: Srovnání časů a počtu stupňů volnosti (N) při postupném zjemňování sítě. Odpovídá výpočtům v grafu vlevo.

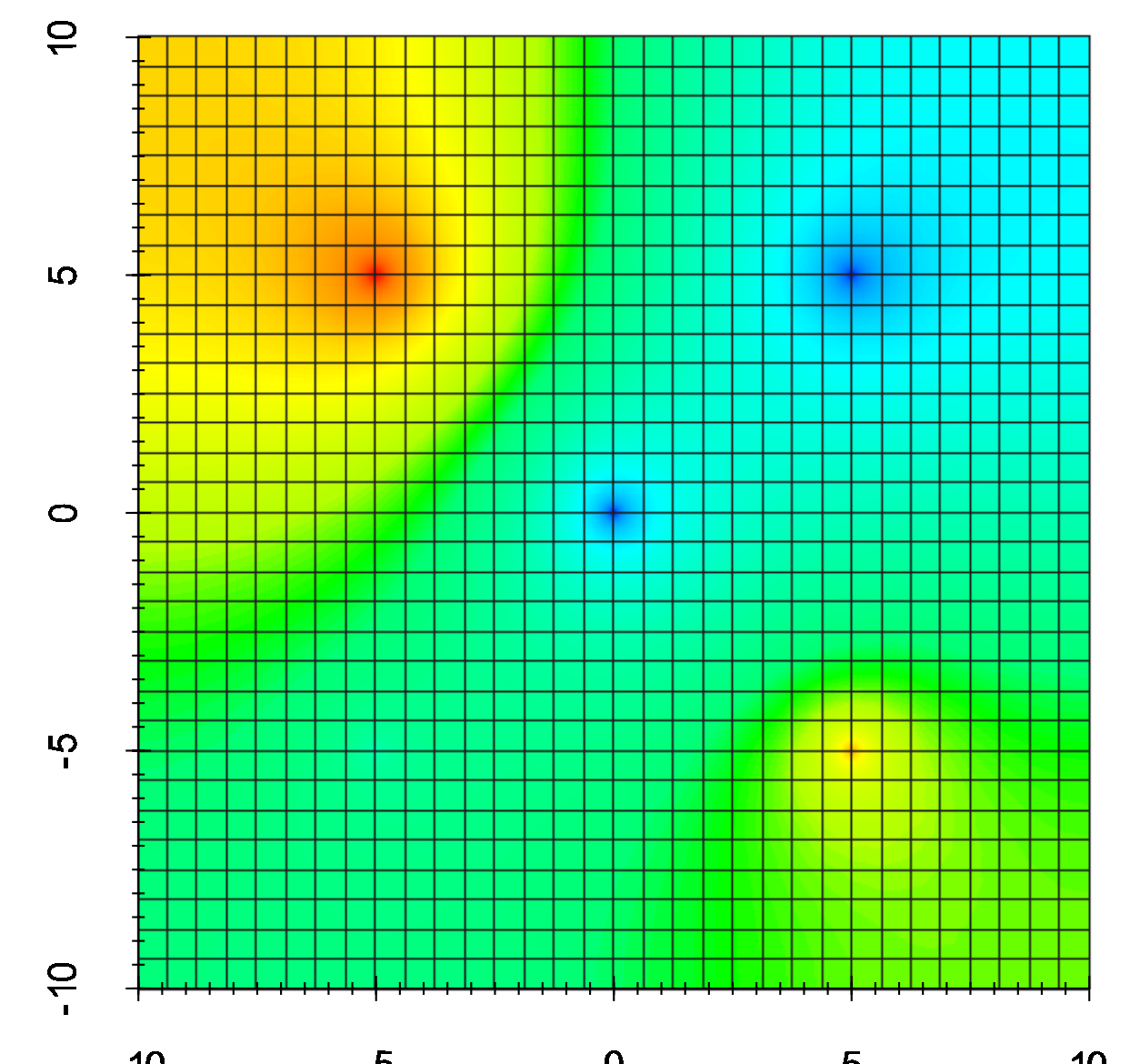
Výsledky měření konvergence jsou srovnatelné s výsledky, které uvádí [5] – pro XFEM řád $O(h^{1.8})$ a pro FEM $O(h^{0.4})$. Vyššího řádu FEM metody v našem případě jsme dosáhli jinou geometrií úlohy a tím, že vrt je umístěn do uzlového bodu, obecně je však nižší.

Komplexní úloha

Pro demonstraci nárůstu časových a paměťových nároků FEM jsme spočítali úlohu s pěti vrty s různými tlaky na jedné zvodni. Obrázek 5 ukazuje adaptivně zjemněnou síť metody FEM. Naproti tomu můžeme srovnat pravidelnou hrubou síť pro XFEM na obr. 6. Relativní rozdíl obou řešení se pohybuje pod jedním procentem. Čas výpočtu poslední iterace pomocí FEM (171 s) je desetinásobný oproti XFEM metodě (17 s).



Obr. 5: Síť FEM – po 9 zjemněních 28453 elementů



Obr. 6: Síť XFEM – 1024 elementů

Závěr a výhled do budoucna

Podařilo se implementovat metodu XFEM a reprodukovat výsledky v článku [5]. V práci jsme se navíc zabývali modelem po teoretické stránce a provedli důkaz existence a jednoznačnosti slabého řešení.

Námětů pro další práci je několik. Dále je možné zabývat se jinými způsoby obohacování, například metodou SGFEM (Stable Generalized FEM). V modelu proudění jsme zatím aproximovali pouze rozložení tlaku, dalším záměrem může být aproximace pole rychlostí a aplikace metody XFEM ve smíšené formulaci problému Darcyho proudění.

Reference

- [1] I. Babuška and J. Melenk. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1997.
- [2] W. Bangerth, R. Hartmann, and G. Kanschat. deal.II – a general purpose object oriented finite element library. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(4):24/1–24/27, 2007.
- [3] T. Fries. A corrected xfem approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:503–532, 2007.
- [4] T. Fries and T. Belytschko. The generalized/extended finite element method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84:253–304, 2010.
- [5] R. Gracie and J. Craig. Modelling well leakage in multilayer aquifer systems using the extended finite element method. *Finite elements in Analysis and Design*, Elsevier B.V., 46:504–513, 2010.