Metody rozkladu jednotky pro aproximaci bodových zdrojů vody v porézním prostředí

Bc. Pavel Exner, Mgr. Jan Březina, Ph.D.

Abstrakt

V modelech proudění podzemních vod jsou často zahrnuty rozsáhlé oblasti, vůči kterým se jeví zdroje (např. hydrogeologické vrty) jako bodové. Často používaná metoda konečných prvků nedokáže dostatečně přesně aproximovat tlak a proudové pole v okolí těchto zdrojů. Naším cílem je implementace metody XFEM (rozšířené metody konečných prvků) pro výpočet takových modelů a porovnání s metodou lineárních konečných prvků. Vycházíme z článku [3], jehož výsledky se snažíme rekonstruovat vlastní implementací a následně obohatit.

Úvod

Při modelování různých jevů pomocí metody konečných prvků (nejčastěji lineárních) se setkáváme s problémy aproximace hledané veličiny v okolí míst, kde má tato veličina velké gradienty nebo se jeví v daném měřítku nespojitě. Příkladem takového problému, kterým se budeme zabývat my, je úloha podzemního proudění ve vícezvodňovém systému, do kterého zasahují hydrogeologické vrty. Vrty představují bodové zdroje (mají zanedbatelný rozměr vůči celé oblasti), v jejichž okolí má průběh tlaku logaritmický charakter, a řešení modelu se v bodě zdroje blíží nekonečnu (singularita $|\log 0| \to \infty$). Formulace modelu je inspirována článkem [3].

Naším cílem je implementovat metodu rozšířených konečných prvků (XFEM), pomocí které obohatíme prostor bázových funkcí o funkce, které lépe vystihnou lokální charakter řešení v okolí vrtů. Pro porovnání implementujeme metodu lineárních konečných prvků (FEM) s adaptivně zjemňovanou sítí. Implementaci provedeme v jazyce C++ pomocí knihovny Deal II (verze 7.2, viz [1]). Tato knihovna zatím metodu XFEM nijak nepodporuje.

Model a metody výpočtu

Proudění podzemní vody v hornině lze často zjednodušit na model proudění ve vrstvách (zvodních), neboť i hornina je tvořena vrstvami. Předpokládáme, že jednotlivé zvodně jsou od sebe odděleny nepropustnou vrstvou a komunikují mezi sebou pouze prostřednictvím vrtů. Zvodně budeme modelovat jako 2D plochy. Matematicky popíšeme takový model soustavou rovnic

$$-T^m \Delta h^m = f^m \qquad \text{na } \Theta^m, \tag{1}$$

$$\int_{\partial B_w^m} \sigma_w^m \left(h^m - H_w^m\right) \mathrm{d}\mathbf{x} = c_w^{m+1}\left(H_w^m - H_w^{m+1}\right) - c_w^m \left(H_w^{m-1} - H_w^m\right), \tag{2}$$

$$\text{pro všechna } m = 1, \dots, M \ \text{ a } w = 1, \dots, W.$$

Indexy m a w v rovnicích označují vztah veličin k m-té zvodni a k w-tému vrtu. Rovnice (1) je odvozena z Darcyho zákona a z rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu, za předpokladu izotropního prostředí. V (1) značí T^m [m^{2}s^{-1}] transmisivitu, h^m [m] tlakovou výšku a f^m [ms^{-1}] hustotu zdrojů v m-té zvodni. Rovnice (2) vyjadřuje rovnováhu mezi rozdílem přítoku a odtoku ve vrtu na pravé straně a tokem přes hranici vrtu do zvodně na levé straně rovnice. V (2) značí σ_w^m [ms^{-1}] koeficient propustnosti mezi w-tým vrtem a m-tou zvodní, H_w^m tlakovou výšku ve vrtu w na úrovni m-té zvodně, c_w^m [m^{2}s^{-1}] propustnost vrtu mezi zvodněmi a ∂B_w^m hranici vrtu.

Na vrty se dá nahlížet dvěma způsoby – Newtonova okrajová podmínka na hranici vrtu, viz (2), nebo zdroj v ploše průniku vrtu a zvodně (rovnice odvozeny v diplomové práci). Obě varianty jsme otestovali s tím, že vrty brané jako plošné zdroje zjednodušují implementaci a mírně urychlují asemblaci.

Při řešení modelu metodou XFEM (přesněji její modifikovanou verzí s funkcí rampy g_w, více v [2]) hledáme aproximaci tlaku v jedné zvodni ve tvaru

$$h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{j\in\mathcal{N}} \alpha_j\, \varphi_j(\mathbf{x})}_{\text{FEM}} + \underbrace{\sum_{w\in\mathcal{W}} \sum_{k\in\mathcal{N}_w} g_w(\mathbf{x})\beta_{w,k}\, \phi_w(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})}_{\text{obohacení}}, \tag{3}$$

kde první část, se stupni volnosti α_j, odpovídá aproximaci pomocí lineárních konečných prvků φ_j a druhá část, se stupni volnosti $\beta_{w,k}$, obohacení pomocí obohacující funkce ϕ_w. Funkce volíme $\phi_w = \log(r)$ pro $r > R_w$ a $\phi_w = \log(R_w)$ pro $r \leq R_w$, kde R_w je poloměr vrtu a r vzdálenost od středu vrtu. Množina $\mathcal{N}$ obsahuje indexy všech uzlů sítě, množina $\mathcal{W}$ indexy vrtů a množina $\mathcal{N}_w$ indexy obohacených uzlů od vrtu w. Obohacujeme uzly sítě, které spadají do oblasti v okolí vrtu dané zvoleným poloměrem.

Výsledky

Provedli jsme implementaci metody FEM s adaptivně zjemňovanou sítí pro řešení popsaného modelu s jednou zvodní. Podařilo se implementovat modifikovanou metodu XFEM s lineárními konečnými prvky a obohacením logaritmickou funkcí. Na úloze, ve které známe analytické řešení, jsme ukázali, že metoda XFEM velmi dobře aproximuje tlakovou výšku v okolí vrtu a rychle konverguje s řádem $O(h^{1.7})$. Výsledky konvergence obou metod jsou srovnatelné s článkem [3], kde uvádí pro FEM $O(h^{0.4})$ a XFEM $O(h^{1.8})$. Na úlohách s více vrty jsme demonstrovali velký nárůst paměťové a časové náročnosti výpočtu metodou FEM při zjemňování sítě oproti XFEM.

Závěr

V teoretické části jsme odvodili slabou formulaci z rovnic (1) a (2) a dokázáli existenci a jednoznačnost slabého řešení pomocí Laxovy-Milgramovy věty (viz [4]). Navrhli jsme vlastní implementaci metody XFEM, ukázali její použití a přednosti, které nabízí oproti FEM, a potvrdili výsledky uvedené v článku [3]. Navíc jsme vyzkoušeli pozměněnou formulaci modelu, ve které nahlížíme na vrty jako na plošné zdroje v oblasti zvodní, což přineslo výše zmíněné výhody.

Metoda XFEM nabízí mnoho dalších možností jak model dále rozvíjet a optimalizovat – volba velikosti oblasti obohacení, adaptivní integrace na obohacených elementech, tvar členu obohacení a další. Bodové zdroje nejsou jediným problémem vhodným pro řešení metodou XFEM, dalším námětem může být aproximace pole rychlostí pomocí XFEM ve smíšené formulaci a aplikace v puklinovém proudění.

Poděkování

Děkuji Mgr. Janu Březinovi, Ph.D., vedoucímu mé diplomové práce, za odborné vedení a také Mgr. Janu Stebelovi, Ph.D. za poskytnuté rady.

Reference

[1] W. Bangerth, R. Hartmann, and G. Kanschat. deal.II – a general purpose object oriented finite element library. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(4):24/1–24/27, 2007.

[2] T. P. Fries. A corrected xfem approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:503–532, 2007.

[3] R. Gracie and J. R.Craig. Modelling well leakage in multilayer aquifer systems using the extended finite element method. *Finite elements in Analysis and Design, Elsevier B.V.*, 46:504–513, 2010.

[4] K. Rektorys. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky.* Academia Praha, 1999.